Lineaarialgebra (sivuaineopiskelijat), 2. välikoe, 12.12.2019

Koe kestää noin 3 tuntia. Kirjoita vastaustesi perustelut ja välivaiheet näkyviin, pelkistä vastauksista (esimerkiksi laskimesta) ei saa pisteitä.

1. Ortogonalisoi *Gramin-Schmidtin menetelmällä* aliavaruuden $U \subseteq \mathbb{R}^4$ kanta

$$\mathcal{B} = \{(1,-1,0,0),(2,0,0,3),(-1,-3,0,5)\}.$$

2. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Laske matriisin A ominaisarvot.

b) Jos mahdollista, diagonalisoi matriisi A (eli anna matriisi P ja diagonaalimatriisi D, joille $P^{-1}AP = D$).

3. Tarkastellaan lineaarikuvausta

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (3x+y+z, 2x-2y+2z, -x-3y+z).$$

Anna lineaarikuvauksen f matriisi $M_{\mathcal{E}}(f)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollisen kannan suhteen. Etsi myös kanta aliavaruudelle $\mathrm{Im}(f)^{\perp}$.

4. Anna neliömuodon $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - xz + yz$ matriisi.

Todista lisäksi seuraava monisteen lause: *Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$. Kun $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ovat parittain erisuuria matriisin A ominaisarvoja, niin niihin kuuluvien ominaisavaruuksien summa on suora summa.*