

Lineaarialgebra (sivuaineopiskelijat)

Tentti, 13.12.2024

Koe kestää noin 4 tuntia. Kirjoita ratkaisujesi perustelut näkyviin, pelkistä vastauksista (esimerkiksi laskimesta) ei saa pisteitä. Tentissä saa olla mukana vain kirjoitusvälineet (ei taulukkokirjoja) ja ns. funktiolaskin (ei symboliseen laskentaan soveltuva tai graafinen laskin).

1. Täydennä joukko

$$\{(0, 1, 1), (2, 1, 3)\}$$

avaruuden \mathbb{R}^3 kannaksi. Miksi joukkoa

$$\{(2, 0, 2), (-1, 0, -1)\}$$

ei voi täydentää avaruuden \mathbb{R}^3 kannaksi?

2. Olkoon matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Anna matriisin A ominaisarvot.

b) Diagonalisoi, jos mahdollista, matriisi A (eli anna matriisi P ja diagonaalimatriisi D , joille $P^{-1}AP = D$.)

3. Mikä on kannanvaihdon matriisi, kun avaruuden \mathbb{R}^3 luonnollinen kanta kierretään kulman β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) verran z -akselin ympäri myötäpäivään (katsottaessa origoa pisteestä $(0, 0, 1)$).

4. Todista seuraava luennoilla esitetty tulos:

Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja ja $m \leq n$. Jos vektorijoukko

$$S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

on ortonormaali, niin se on lineaarisesti riippumaton.