

Matematiikan peruskurssi 1

Tentti (kesto n. 3h), 10.2.2025

Tentissä saa olla mukana *kirjoitusvälineet* ja *funktiolaskin* sekä kaavakokoelma *Matematiikan kaavoja* ja kirja *MAOL-taulukot*. Tentissä on kuusi tehtävää, joista jokainen on 8 pisteen arvoinen. Näin ollen tentin kokonaispistemäärä on $6 \times 8 = 48$.

1. Laske seuraavien lausekkeiden arvot *ilman laskinta*. (2 pistettä/kohta)

(a) $\frac{2}{21} \cdot \frac{3!}{7} - \frac{1}{6}$

(b) $\frac{8^{15}}{2^{43}} - (-1)^{2^{2025}}$

(c) $|\log_4 2 - \log_4 128|$

(d) $\sum_{k=0}^3 \max\{2k, 2^k\}$

2. Olkoot $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ perusjoukko sekä $A = \{2, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 5, 6, 8\}$ ja $C = \{1, 3, 4, 5, 7\}$ sen osajoukkoja. Anna seuraavat joukot luettelemalla niiden alkiot. (2 pistettä/kohta)

(a) $A \cap C$

(b) $\overline{A} \setminus B$

(c) $D = \{x \in B \cup C \mid x \text{ on jaollinen kolmella}\}$

Tutki lisäksi, onko seuraava väite voimassa: $\{8\} \subset (A \cap B) \setminus C$. (2 pistettä)

3. Olkoot $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 7}$ ja $g(x) = -3x^2 + 5$ reaalifunktioita.

(a) Määritä funktioiden f ja g määrittelyjoukot. (3 pistettä)

(b) Muodosta lauseke $(f \cdot f) - g$ ja sievennä se. (2 pistettä)

(c) Muodosta funktioiden yhdiste $g \circ f$ ja sievennä saamasi lauseke. (2 pistettä)

(d) Pohdi, onko funktio f surjektiivinen. (1 pistettä)

4. Ratkaise seuraavat yhtälöt.

(a) $\log_{32} x = \frac{3}{5}$ (2 pistettä) (b) $\log_x 24 = \frac{2}{3}$ (3 pistettä) (c) $8^x = 32$ (3 pistettä)

5. (a) Muunna kulman suuruus 48° radiaaneiksi. (1 pistettä)

(b) Muunna kulman suuruus $-3\pi/4$ asteiksi. (1 pistettä)

(c) *Johda* trigonometrinen funktioiden arvot $\cos(-3\pi/4)$ ja $\sin(-3\pi/4)$ *muistikolmioiden avulla*. (Pelkät MAOL-taulukoista luetut vastaukset eivät siis riitä!) (3 pistettä)

(d) Määritä lausekkeiden arvot $\arcsin(\sin(2\pi/3))$ ja $\sin(\arccos(5/13))$. (3 pistettä)

6. Tarkastellaan tehtävässä *Newtonin binomikaavaa*, jonka mukaan

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i,$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja n positiivinen kokonaisluku.

(a) Todista Newtonin binomikaava. (6 pistettä)

(b) Määritä se lausekkeen

$$\left(2x^3 - \frac{3}{x^2}\right)^{17}$$

termi, jonka tekijänä on x^{11} . (2 pistettä)