

Lineaarialgebra (sivuaineopiskelijat)

Tentti, 31.3.2025

Koe kestää noin 4 tuntia. Kirjoita ratkaisujesi perustelut näkyviin, pelkistä vastauksista (esimerkiksi laskimesta) ei saa pisteitä. Tentissä saa olla mukana vain kirjoitusvälineet (ei taulukkokirjoja) ja ns. funktiolaskin (ei symboliseen laskentaan soveltuva tai graafinen laskin).

1. a) Etsi suoran

$$L : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{1}$$

ja tason $T : 3x - y + z = 0$ leikkauspiste.

- b) Ovatko vektorit $(1, 1, 0, 2)$, $(1, 1, -2, -4)$ ja $(3, 1, 0, 1)$ lineaarisesti riippumattomia?

2. Ortogonalisoi *Gramin-Schmidtin menetelmällä* aliavaruuden $U \subseteq \mathbb{R}^4$ kanta

$$\mathcal{B} = \{(-1, 0, 2, 0), (3, 0, -1, 1), (-1, 0, 1, 1)\}.$$

3. Olkoon lineaarikuvaus

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x + 2y + z, x + 3y + 2z, 5x - y - 2z).$$

- a) Anna lineaarikuvauksen f matriisi $M_{\mathcal{E}}(f)$ luonnollisen kannan suhteen.
b) Onko f injektio?
c) Etsi kanta aliavaruudelle $\text{Im}(f)^\perp + \text{Ker}(f)$.

4. Todista seuraava monisteen tulos:

Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$. Kun $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ovat parittain erisuuria matriisin A ominaisarvoja, niin niihin kuuluvien ominaisavaruuksien summa on suora summa.

