Johdatus lineaarialgebraan, 1. tentti, 5.3.2025

Kirjoita jokaiseen vastauspaperiin nimesi ja opiskelijanumerosi (tai syntymäaika) sekä kurssin nimi.

Jokaisesta tehtävästä saa 8 pistettä, maksimipisteet ovat 32. Tentissä saa käyttää Maolin taulukoita, kaava-arkkia ja laskinta.

1. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

   (a) Laske seuraavat, mikäli mahdollista: $A^T B$, CB, $BA + 2C^T$ (2p per lasku)

   (b) Miten matriiseja A, B ja C voi kertoa keskenään siten että tulokseksi saadaan 4×4 matriisi? (Huomaa, että myös useampaa kuin vain kahta matriisia voidaan kertoa keskenään) (2p)

2. Tutkitaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 4 \\ 2x + 5y = 7 \\ 3x + 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

   (a) Esitä matriisi A siten, että yhtälöryhmä saadaan muotoon $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1p)

   (b) Laske $\det(A)$ (2p)

   (c) Laske A^{-1} (3p)

   (d) Ratkaise yhtälöryhmä hyödyntäen matriisin A käänteismatriisia (2p)

3. Olkoon $a \in \mathbb{R}$ vakio. Olkoon $U = \left\{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \text{ ja } (x, y, z) \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & \frac{11}{3} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\}$.

   (a) Onko U on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus (perustele)? (5p)

   (b) Mikä on $\dim U$? (3p)

4. Oletetaan, että matriisi $A = (a_{ij})_{n \times n}$ indusoi lineaarikuvauksen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Tiedetään, että

   I. $A^3 = O$,

   II. $f(0, 0, 1) = (0, 1, 0)^T$,

   III. $(f \circ f)(1, 0, 0) = (0, -2, 0)^T$ ja

   IV. $a_{22} = 0$.

   Esitä jokin matriisi A, joka täyttää kaikki yllä kuvatut ehdot. (Tehtävästä saa sitä enemmän pisteitä, mitä pidemmälle päättelyssään pääsee)