

Matematiikan peruskurssi 3

Tentti (kesto n. 3h), 17.3.2025

Tentissä saa olla mukana *kirjoitusvälineet* ja *funktioalaskin* sekä kaavakokoelma *Matematiikan kaavoja* ja kirja *MAOL-taulukot*. Tentissä on neljä tehtävää, joista jokainen on 8 pisteen arvoinen. Näin ollen tentin kokonaispistemäärä on $4 \times 8 = 32$.

1. (a) Määritä antiderivaatta (eli integraalifunktio)

$$\int \frac{x+3}{x^2+x-2} dx. \quad (4 \text{ pistettä})$$

- (b) Laske seuraavat määrätyt integraalit (mikäli ne ovat äärellisinä olemassa).

$$(a) \int_2^4 \frac{x+3}{x^2+x-2} dx \quad (2 \text{ pistettä}) \qquad (b) \int_{-1}^1 \frac{x+3}{x^2+x-2} dx \quad (2 \text{ pistettä})$$

2. (a) Määritä differentiaaliyhtälön $-y'' - 7y' + 8y = 0$ kaikki ratkaisut. (3 pistettä)
(b) Etsi lisäksi differentiaaliyhtälön $-y'' - 7y' + 8y = 0$ sellainen yksittäisratkaisu, joka toteuttaa reunaehdon $y(0) = y'(0) = 1$. (2 pistettä)
(c) Määritä differentiaaliyhtälön $-y'' - 7y' + 8y = 16x + 2$ kaikki ratkaisut. (3 pistettä)
3. Määritä funktion $f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y$ pienin ja suurin arvo alueessa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ ja } 0 \leq y \leq 1\}.$$

4. (a) Tarkastellaan sarjaa $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.
(i) Kerro, mitä tiedetään raja-arvosta $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, jos $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ suppenee. (1 pistettä)
(ii) Todista edellisessä kohdassa muotoilemasi tulos oikeaksi. (3 pistettä)
- (b) Tutki, suppenevatko seuraavat sarjat, ja määritä suppenevien sarjojen summat.

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k-2)(-5k+4)}{-3k^2+4k-7} \quad (2 \text{ pistettä}) \qquad (ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^{2k-1}}{7^{k+1}} \quad (2 \text{ pistettä})$$