

TILM3568 -Todennäköisyyslaskenta sivuaineopiskelijoille SL-2024  
Tentti 17.3.2025, 3 tuntia

**Sallitut apuvälineet:**

Kirjoitusvälineet

Laskin (ei saa olla graafinen tai symbolinen)

Todennäköisyyslaskennan kaavakokoelma

Ratkaise alla olevista tehtävistä **kaikki**.

Käytä ratkaisuisi mahdollisimman selkeitä merkintätapoja.

Selitä huolellisesti, mitä olet laskenut, pelkät laskutoimitukset eivät riitä.

Jokainen tehtävä on maksimissaan 6 pistettä.

Koko tentin pistemäärä on maksimissaan 30 pistettä.

**Tentin hyväksytyt suoritus vaatii:**

**Osasta 1** pitää saada vähintään 6 pistettä.

**Osasta 2** pitää saada vähintään 4 pistettä.

**Koko tentistä** pitää saada vähintään 15 pistettä.

Hyvityspisteet otetaan huomioon vasta kun osat 1 ja 2 on suorittanut hyväksytysti.

**Osa 1: Klassinen todennäköisyys**

1. Vastaa alla oleviin kysymyksiin.

a) Mitä tarkoitetaan tapausten riippumattomuudella? Entä toisensa poissulkevuudella?

Tapausten  $A$ ,  $B$  ja  $C$  todennäköisyydet ovat  $P(A) = 1/5$ ,  $P(B) = 1/4$  ja  $P(C) = 1/3$ . Laske todennäköisyydet

$P$ ("kaikki tapahtuvat"),  $P$ ("ainakin yksi tapahtuu") sekä  $P$ ("yksikään ei tapahdu"), kun tapaukset  $A$ ,  $B$  ja  $C$  ovat

b) toisensa poissulkevat,

c) riippumattomat.

2. Kolme numeroa valitaan **palauttaen** joukosta 0, 1, 2, ..., 9. Millä **todennäköisyydellä**
- a) numerot ovat 7,4 ja 0 tässä järjestyksessä,
  - b) numerot ovat 7,4 ja 0 missä tahansa järjestyksessä,
  - c) kaikki numerot ovat samoja,
  - d) kaikki numerot ovat erilaisia,
  - e) numeroista kaksi on samoja mutta yksi on erilainen?
  - f) Miten tarkastat, että c), d) ja e)-kohdissa lasketut todennäköisyydet ovat oikein?
3. Dopingtestillä on mahdollista saada selville 95 % dopingia käyttäneistä. Testi antaa puhtaille urheilijoille väärän positiivisen tuloksen 2 % todennäköisyydellä. Oletetaan, että joka sadas urheilija käyttää dopingia. Millä todennäköisyydellä
- a) satunnaisesti valittu urheilija antaa positiivisen näytteen?
  - b) positiivisen näytteen antanut urheilija on käyttänyt dopingia?
  - c) Piirrä puukuvio ja merkitse siihen tehtävänannosta tunnetut todennäköisyydet.

## Osa 2: Satunnaismuuttujat

4. Tikka osuu yksittäisessä heitossa keskelle tikkataulua 1% todennäköisyydellä. Tehdään 200 toisistaan riippumatonta tikan heittoa. Olkoon  $X =$  "keskelle tikkataulua osuneiden tikkojen lukumäärä".
- a) Mitä jakaumaa  $X$  noudattaa ja mitkä ovat jakauman parametrit?
  - b) Mikä on satunnaismuuttujan  $X$  odotusarvo ja varianssi?
  - c) Millä todennäköisyydellä **ainakin** kolme tikkaa osuu keskelle tikkataulua?
  - d) Millä toisella diskreetillä jakaumalla voidaan approksimoida edellä laskettu todennäköisyys? Laske kyseinen todennäköisyys käyttäen tätä jakaumaa.
5. Olkoon satunnaismuuttuja  $X \sim N(-10, 25)$ .
- a) Määrää  $P(X = 0)$ .
  - b) Määrää  $x$  siten, että  $P(X \leq x) = 0,5$ .
  - c) Määrää  $P(X \leq -15)$ .
  - d) Määrää satunnaismuuttujan 95-prosentin luottamusväli.