

## Matematiikan peruskurssi 3

Tentti (kesto n. 3h), 5.5.2025

Tentissä saa olla mukana *kirjoitusvälineet* ja *funktiolaskin* sekä kaavakokoelma *Matematiikan kaavoja* ja kirja *MAOL-taulukot*. Tentissä on neljä tehtävää, joista jokainen on 8 pisteen arvoinen. Näin ollen tentin kokonaispistemäärä on  $4 \times 8 = 32$ .

1. (a) Olkoon funktio  $f$  jatkuva suljetulla välillä  $[a, b]$ . Analyysin peruslauseen ensimmäisen kohdan mukaan funktiolla  $f$  on tällöin välillä  $[a, b]$  integraalifunktio  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$  ja sen kaikki integraalifunktiot ovat siis muotoa  $G(x) + C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ). Osoita tämän tuloksen nojalla, että jos  $F(x)$  on kuvauksen  $f(x)$  eräs antiderivaatta (eli integraalifunktio), niin silloin

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

- (b) Laske tarkka arvo määrätylle integraalille

$$\int_1^e x \left( x + \frac{1}{x^2} \right) dx \quad (4 \text{ pistettä}).$$

2. Oletetaan, että funktio  $L(t)$  kuvaa pizzan lämpötilaa (celciusasteina) ajan hetkellä  $t$  (minuuttia) pizzan ottamisesta uunista. Pizzan lämpötilan muutosnopeus on suoraan verrannollinen pizzan lämpötilan  $L(t)$  ja ympäristön lämpötilan  $L_s$  erotukseen eli toisin sanoen

$$\frac{dL}{dt} = k \cdot (L(t) - L_s),$$

missä  $k \in \mathbb{R}$  on jokin vakio.

- (a) Ratkaise edellä esitetty differentiaaliyhtälö, kun oletetaan uunista otettaessa pizzan lämpötilan olevan  $L(0) = 250$  astetta ja ympäristön lämpötilan pysyvän vakiona  $L_s = 25$  astetta. (5 pistettä)
- (b) Oletetaan lisäksi, että viiden minuutin kuluttua pizzan lämpötila on tippunut 200 asteeseen. Määritä tämän perusteella edelleen differentiaaliyhtälössä esiintyvä vakio  $k$ . (3 pistettä)
3. (a) Määritä seuraavat kahden muuttujan raja-arvot (jos ne siis ovat olemassa):

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (3,-6)} \log_3(x^2 - 3y) \quad (2 \text{ pistettä}) \quad (ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{(x+y)^3} \quad (2 \text{ pistettä})$$

- (b) Laske pintaintegraali

$$\int_A (3x + 2y) dA,$$

missä  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 1 \text{ ja } 0 \leq y \leq 2\}$ .

4. (a) Muodosta funktion  $f(x) = \arcsin(2x)$  Maclaurinin sarja. (4 pistettä).
- (b) Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(2x) - 2x - \frac{4}{3}x^3}{x^5}. \quad (4 \text{ pistettä}).$$