

Johdatus lineaarialgebraan, 2. tentti, 8.5.2025

Jokaisesta tehtävästä saa 8 pistettä, maksimipisteet ovat 32. Tentissä saa käyttää Maolin taukokoita, kaava-arkkia ja laskinta.

Kirjoita jokaiseen vastauspaperiin nimesi ja opiskelijanumerosi (tai syntymäaika)

1. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Laske seuraavat, mikäli mahdollista: BC , CA , $2B^T A + A^T$ (2pts per lasku)

(b) Olkoon matriisi E tyyppiä 13×14 , F tyyppiä 8×14 ja G tyyppiä 8×13 . Olkoon

$$H = 3 \cdot (2EF^T G)^{114}$$

tyyppiä $a \times b$ (jos matriisi H on määritelty). Ratkaise luvut a ja b . (2pts)

2. Olkoon matriisi $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ ja matriisi $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Olkoon f matriisin A indusoima lineaarikuvaus ja g matriisin B indusoima lineaarikuvaus. Laske (jos mahdollista):

(a) Matriisien A ja B determinantit (3pts)

(b) Matriisien A ja B käänteismatriisit (3pts)

(c) $f(1, 1, -1, 0)$ ja $g(1, 0, 2, 3)$ (2pts)

3. (a) Esitä kaikki permutaation $(1, 5, 6, 2, 4, 3)$ inversiot. (2pts)

(b) Onko permutaatio $(1, 5, 6, 2, 4, 3)$ parillinen vai pariton (perustele)? (1pts)

(c) Monessako lukujen $1, 2, \dots, n$, missä $n \geq 4$, parillisessa permutaatiossa luvut $1, 2, 3$ ja 4 esiintyvät neljänä peräkkäisenä lukuna ja ovat järjestyksessä $1, 2, 4, 3$? (5pts)

4. Olkoon matriisi $A_x = (a_{ij})_{100 \times 100}$, missä $a_{10,10} = x \in \mathbb{R}$ ja muut alkio $a_{i,j}$ sellaisia reaali-lukuja (vakioita), että $\det(A_0) = 0$. Lisäksi olkoon

$$U = \{(\det(A_x), 2\det(A_x), 3\det(A_x)) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Esitä kolme ehtoa, jotka vaaditaan, että joukko U olisi avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus. (1pts)

(b) Onko U avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus (perustele)? (4pts)

(c) Jos U on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus, niin mikä on $\dim U$ ja miten se riippuu matriisin A_x vaakarivien muodostamien vektorien lineaarisesta riippuvuudesta? (3pts)