

Matematiikan peruskurssi 4

Tentti (kesto n. 3h), 20.5.2025

Tentissä saa olla mukana *kirjoitusvälineet* ja *funktiolaskin* sekä kaavakokoelma *Matematiikan kaavoja* ja kirja *MAOL-taulukot*. Tentissä on neljä tehtävää, joista jokainen on 8 pisteen arvoinen. Näin ollen tentin kokonaispistemäärä on $3 \times 8 = 24$.

1. (a) Määritä seuraavat funktioiden raja-arvot:

(i) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x - 7)$ (1 pistettä) (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{xe^{\pi x}} \right)$ (2 pistettä)

(iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x^2 e^x)^{1/x}$ (2 pistettä)

- (b) Osoita edellisessä kohdassa saamasi raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x - 7)$ oikeaksi formaaliin määritelmään nojautuen. (3 pistettä)

2. (a) Kerro lyhyesti (kurssilla esitellyistä) menetelmistä, joilla voidaan tarkastella sarjan suppenevuutta/hajaantuvuutta. (4 pistettä)

- (b) Tutki seuraavien sarjojen suppenevuutta.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}(2 - \sin k)}{k^2 + 5k - 3}$ (2 pistettä) (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+3)!}{e^{3k}}$ (2 pistettä)

3. (a) Kerro lyhyesti, mitä tarkoitetaan reaalilukujen täydellisyysaksioomalla. (2 pistettä)

- (b) Olkoon funktio f jatkuva välillä $I = [a, b]$. Oletetaan tunnetuksi, että jos piste $c \in I$ ja $f(c) \neq 0$, niin tällöin on olemassa sellainen reaaliluku $\delta > 0$, että leikkausjoukossa $(c - \delta, c + \delta) \cap I$ funktion $f(x)$ arvot ovat samanmerkkisiä.

Todista tähän nojautuen Bolzanon lause, jonka mukaan arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ ollessa päätepisteissä erimerkkiset funktiolla f on avoimella välillä (a, b) ainakin yksi nollakohta eli $f(x_0) = 0$ jollain $x_0 \in (a, b)$. (6 pistettä)