

Lineaarialgebra (sivuaineopiskelijat)

Tentti, 12.12.2025

Koe kestää noin 4 tuntia. Kirjoita ratkaisujesi perustelut näkyviin, pelkistä vastauksista (esimerkiksi laskimesta) ei saa pisteitä. Tentissä saa olla mukana vain kirjoitusvälineet (ei taulukkokirjoja eikä tekoälyä) ja ns. funktiolaskin (ei symboliseen laskentaan soveltuva tai graafinen laskin).

1. a) Ovatko vektorit $(1, 1, 2, 3)$ ja $(-1, 5, 2, -1)$ lineaarisesti riippumattomia?
b) Millä reaaliluvun x arvoilla matriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 0 & 3 & x \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

on säännöllinen?

2. Olkoon matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Anna matriisin A ominaisarvot.
b) Diagonalisoi, jos mahdollista, matriisi A (eli anna matriisi P ja diagonaalimatriisi D , joille $P^{-1}AP = D$.)
3. Laske vektorin $\mathbf{x} = (4, -8, -10, -3)$ ortogonaaliprojektio aliavaruudella

$$U = \{(a + 3b, -a + b, b, a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

4. Todista seuraava luennoilla esitetty tulos:

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineaarikuvaus. Silloin

$$f \text{ on injektio} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}.$$