

Lineaarialgebra (sivuaineopiskelijat)

Tentti, 2.3.2026

Koe kestää noin 4 tuntia. Kirjoita ratkaisujesi perustelut näkyviin, pelkistä vastauksista (esimerkiksi laskimesta) ei saa pisteitä. Tentissä saa olla mukana vain kirjoitusvälineet (ei taulukkokirjoja eikä tekoälyä) ja ns. funktiolaskin (ei symboliseen laskentaan soveltuva tai graafinen laskin).

1. a) Anna pisteiden $(3, -2, 4)$ ja $(-5, -7, -1)$ kautta kulkeva suora $L \subseteq \mathbb{R}^3$ standardiesityksenä eli muodossa

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Tarkista standardiesityksen avulla, ovatko pisteet $(3, 3, 1)$ ja $(11, 3, 9)$ kyseisellä suoralla.

- b) Olkoon avaruuden $\mathbb{R}^3$ kantana $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, missä $\mathbf{b}_1 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0, 1)$ ja $\mathbf{b}_3 = (0, 1, 2)$. Anna kannanvaihdon $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ matriisi $P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}}$, missä $\mathcal{E}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollinen kanta.

Anna myös kannanvaihdon matriisi $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}}$.

2. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Anna matriisin A ominaisarvot ja niiden algebralliset kertaluvut.
b) Laske ominaisarvoille kaikki niihin kuuluvat ominaisvektorit.

3. a) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus, jolle $f(1, -1) = (1, 1, 1)$ ja $f(-2, 1) = (3, 2, 1)$. Laske kuva $f(x, y)$ yleiselle vektorille (x, y) . Onko f injektio?

- b) Olkoon

$$\mathcal{B} = \{(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1)\}$$

aliavaruuden $U \subseteq \mathbb{R}^4$ kanta. Anna, jos mahdollista, sellainen reaaliluku a , että

$$U = L((5, 4a, 11, 7a), (0, 1, a, 3), (4, 3, 2, 1)).$$

4. Todista seuraava luennoilla esitetty tulos:

Kun U on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus, niin

$$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp.$$