

Johdatus lineaarialgebraan, 1. tentti, 4.3.2026

Kirjoita jokaiseen vastauspaperiin nimesi ja opiskelijanumerosi (tai syntymäaika) sekä kurssin nimi. Jokaisesta tehtävästä saa 8 pistettä, maksimipisteet ovat 32.

1. Olkoon $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Laske seuraavat, mikäli mahdollista: BA , $BB^T + 2C$ ja $B^TB - C$. (2p per lasku)

(b) Onko seuraava matriisi määritelty ja mitä tyyppiä se on:

$$2A^TB^TC^5BB^TBA.$$

(2p)

2. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Tiedetään, että $\det(A) = -108$. Olkoon $t \in \mathbb{R}$. Anna kaava determinantille $\det(tA)$. (2p)

(b) Muokkaa matriisit A ja B redusoiduiksi porrasmatriiseiksi hyödyntäen alkeismuunnoksia. (3p)

(c) Laske, jos mahdollista, A^{-1} ja B^{-1} . (3p)

3. Olkoon kuvaus $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, missä $f(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ja $A = \begin{pmatrix} a^2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sekä $a \in \mathbb{R}$ on vakio. Olkoon $U = \{f(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

(a) Millä parametrin a arvoilla f on lineaarikuvaus? (2p)

(b) Esitä aliavaruuden määritelmän kolme ehtoa. (1p)

(c) Millä parametrin a arvoilla U on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus? (2p)

(d) Miten parametrin a arvo vaikuttaa dimensioon $\dim(U)$? (3p)

4. Olkoon matriisi $A = (a_{ij})_{n \times n}$, missä $a_{ij} = 1$, kun $i \neq j$ ja $a_{ii} = 0$ kaikilla $1 \leq i \leq n$ ja $1 \leq j \leq n$. Lisäksi olkoon $B = A + 2I$.

(a) Laske $\det(B)$, kun $n = 3$. (2p)

(b) Laske $\det(B)$, kun n on positiivinen kokonaisluku. (6p)