

Lineaarialgebra (sivuaineopiskelijat)

Tentti, 26.1.2026

Koe kestää noin 4 tuntia. Kirjoita ratkaisujesi perustelut näkyviin, pelkistä vastauksista (esimerkiksi laskimesta) ei saa pisteitä. Tentissä saa olla mukana vain kirjoitusvälineet (ei taulukkokirjoja eikä tekoälyä) ja ns. funktiolaskin (ei symboliseen laskentaan soveltuva tai graafinen laskin).

1. Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & -3 & -12 & -9 \end{pmatrix}$$

kanssa rivekvivalentti redusoitu porrasmuoto ja päättelee siitä matriisin aste $r(A)$.

2. Taso $T \subseteq \mathbb{R}^3$ kulkee pisteiden $(2, 1, -1)$, $(1, 2, -3)$ ja $(2, 2, 0)$ kautta. Määritä tason yhtälö muodossa $T : ax + by + cz = d$.

Onko kyseinen taso T avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus?

3. Tarkastellaan lineaarikuvausta

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (3x + y + z, 2x - 2y + 2z, -x - 3y + z).$$

Etsi kanta aliavaruudelle $(\text{Ker}(f) + \text{Im}(f))^\perp$.

4. Mitä tarkoitetaan seuraavilla kahdella käsitteellä: *ortogonaalinen matriisi* ja *alkeismatriisi*?

Todista lisäksi seuraava luennoilla esitetty tulos:

Symmetrisen ja reaalisen matriisin erisuuriin ominaisarvoihin kuuluvat reaaliset ominaisvektorit ovat ortogonaaliset.